VEKTOROVÉ PROSTORY

- V ... množina, P pole
- $V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a+b$, (sčítání vektorů)
- $0 \in V$,
- $V \to V$, $a \mapsto -a$,
- $P \times V \to V$, $(p,a) \mapsto p \cdot a$ (násobení vektoru skalárem)

$\forall a,b,c \in V$, $p,q \in P$ platí

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $a+0=a$
4) $a+(-a)=0$
5) $1 \cdot a = a$
6) $p \cdot (q \cdot a) = (p \cdot q) \cdot a$
7) $(p+q) \cdot a = (p \cdot a) + (q \cdot a)$
8) $p \cdot (a+b) = (p \cdot a) + (p \cdot b)$

Potom V se nazývá VEKTOROVÝ PROSTOR NAD POLEM P, značíme $V(P)$.

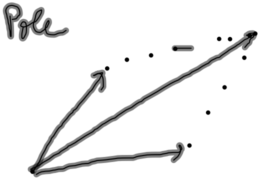
Prvky vekt. prostoru se nazývají VEKTORY.

Prvky pole P se nazývají SKALÁRY.

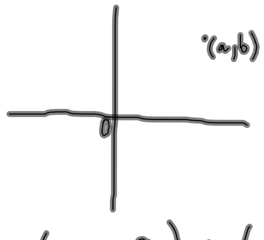
Př.: 1) jednoprvková množina, ozn. $V = 0 = \{0\}$.

2) Pole

3)



4)



P... pole, $n \in \mathbb{N}$

$$P^n = \{(p_1, \dots, p_n) \mid p_1, \dots, p_n \in P\}$$

$$(p_1, \dots, p_n) + (q_1, \dots, q_n) = (p_1+q_1, \dots, p_n+q_n)$$

$$\alpha \cdot (p_1, \dots, p_n) = (\alpha \cdot p_1, \dots, \alpha \cdot p_n)$$

5) $f, g : X \to P$

$f+g : X \to P \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = x$, $g(x) = \sin x$

$(f+g)(x) = x + \sin x$

$u_1, \dots, u_n$ vektory z $V(P)$, $p_1, \dots, p_n \in P$.
LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ $u_1, \dots, u_n$ s koeficienty $p_1, \dots, p_n$ je vektor

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n \in V.$$

Vektory $u_1, \dots, u_n \in V(P)$ GENERUJÍ prostor V, když každý vektor z V je lin. kombinací vektorů $u_1, \dots, u_n$. Tzn., $\forall v \in V \ \exists p_1, \dots, p_n \in P$ tak, že

$$v = p_1 u_1 + \dots + p_n u_n.$$

Př.: $\mathbb{R}^3$ $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$
$(1,1,1), (0,1,1), (1,1,0)$

$$(a,b,c) = x \cdot (1,1,1) + y(0,1,1) + z(1,1,0)$$

Prostor, který má konečnou množinu generátorů, se nazývá KONEČNĚROZMĚRNÝ.

Vektory $u_1, \dots, u_n \in V(P)$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, jestliže
$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = 0$, kde $x_1, \dots, x_n \in P$, implikuje $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Vektory jsou LIN. ZÁVISLÉ, jestliže nejsou lin. nezávislé!

$\mathbb{R}^3$ $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0. \text{ lin. nezáv.}$$

$\mathbb{R}^3$ $(3,2,1), (3,1,0), (6,3,1)$

$$(3,2,1) + (3,1,0) - (6,3,1) = (0,0,0)$$

lin. závislé!

BÁZE vekt. prostoru je n-tice jeho lin. nezávislých generátorů.

$\mathbb{R}^3$ $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

<u>Tvrzení</u> $e_1, \dots, e_n$ báze $V(P)$

Pak $\forall v \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Skaláry $x_1, \dots, x_n$ se nazývají SOUŘADNICE <u>vektoru v</u> v bázi $e_1, \dots, e_n$.

$((1,0),(0,1))$

$((1,1),(1,0))$